

生理学的データの重回帰分析

高木 廣文

平成13年 2 月
超音波検査技術 Vol. 26 No. 1

統計講座 (第10回)

生理学的データの重回帰分析

高木 廣文

はじめに

肉・油脂などの取りすぎは、高血圧などの循環器疾患の原因の一つであると考えられているし、喫煙は肺ガンの原因である等々、物事には相互に何らかの関係があるのが普通である。

ゴルトン (Golton, F., 1822~1911) は、「回帰 regression」と「相関 correlation」という概念を、両親と子供の身長の間を調べた結果に基づいて、はじめて生物統計学の分野に導入した。相関という概念は、大きい両親から生まれた子供の身長は大きく、小さな両親からの子供の身長は小さい傾向があるという両者の関係を示すために用いられた。しかし、大きい両親の子供がさらに大きくなる訳ではなく、また小さい両親の子供がさらに小さくなるという訳でもない。全体として、平均値に向かう傾向があり、この平均化の傾向を示すために「回帰」という言葉が用いられたものである。現在では、ある変数について、他のいくつかの変数を用いて予測などを行うための統計的な手法は「回帰分析 regression analysis」と呼ばれている。

回帰分析では、予測すべき変数は「基準変数 criteria variable」と呼ばれ、予測のために使用する変数は「説明変数 explanatory variable」と呼ばれる。ただし、研究分野によっては基準変数を「従属変数」、外生変数、説明変数を「独立変数」、「内生変数」などと呼ぶこともある。説明

変数が一つの場合には、「単回帰分析」と呼ばれ、説明変数が二つ以上の場合には「重回帰分析」と呼ばれる。今回は、実際に臨床検査で得られたデータを用いて、重回帰分析について解説する。

重回帰分析の目的とモデル

重回帰分析を行う主な目的は、大きく分けて二つ考えられる。すなわち、

- ①ある基準変数に関する予測式を求める。
- ②ある基準変数に対するいくつかの説明変数の影響の程度を検討する。

ことである。

両親の身長から、子供の身長を予測する式を求める場合が①に該当するし、血圧に対する年齢、一日当たりの食塩摂取量と脂肪摂取量がどのような影響を及ぼすのかを検討するのならば、②ということになる。

実際の医学研究では、血圧は簡単に測定できるので、予測する必要はない。多くの場合、予測式を求める価値はあまりなく、変数間の関係の分析を行うために、重回帰分析を用いるのが普通であろう。

重回帰分析のモデルは、基準変数と p 個の説明変数を用いて、

$$\begin{aligned} \text{基準変数の予測値} = & [\text{重み } 1] \times [\text{説明変数 } 1] + \\ & [\text{重み } 2] \times [\text{説明変数 } 2] \\ & + \cdots + [\text{重み } p] \times [\text{説明変数 } P] + \text{定数} \end{aligned}$$

のように、それぞれの説明変数に重みをかけて、その和を計算するという式を考える。このようなモデル式は、一般には「線形モデル linear model」と呼ばれるが、重回帰分析では、この基本式は「重回帰式 multiple regression equation」と呼ばれている。

重回帰分析では、上式の重みを求めることが解析の主眼となる。各変数にかかる重みは「偏回帰係数 partial regression coefficient」と呼ばれている。説明変数の基準変数への影響の有無を検討するには、それぞれの変数の偏回帰係数が0か否かを検定することで調べることができる。

重回帰式から求められる基準変数の予測値と実際値との相関係数は、「重相関係数 multiple correlation coefficient」と呼ばれる。また、重相関係数の2乗は「多重決定係数 multiple coefficient of determination」と呼ばれ、分析に用いた説明変数により、どの程度の予測が可能かを示す指標になる。

生理学的臨床検査データの解析

ここでは、約1,200名の生理学的な臨床検査データをもとに、重回帰分析の実際例を示しながら、重回帰分析の理論的な背景も簡単に説明しよう。

表1は、分析に使用する検査項目の一部を示したものである。対象者の基本的な属性として、年齢、性、身長、体重が調べられている。表中のBMIとは、Body Mass Indexの略号であり、肥満度の指標として用いられており、計算は、体重kg/身長m²により求められる。BMIの値は22の場合を標準としている。血液学的な検査項目として、TG、TC、HDL、GOT、GPT、 γ -GTP、

UA、FBS、および超音波エコーによるEC皮下脂肪厚の測定値である。

14項目のうち、基準変数はEC皮下脂肪厚としよう。ここでは、まず説明を簡単にするため説明変数として、年齢、性、身長、体重、およびBMIの5変数を分析に用いることにしよう。

表2は、重回帰分析に用いる全変数の基本的な統計量を求めたものである。すべてのデータが完備していたケースは1,066例であった。なお、性は男なら1、女なら2を数値として与えている。一般には、質的変数はダミー変数（適当な個数のカテゴリに0、1を与えて分類する）を用いて分析を行うのであるが、カテゴリ数が男女のように二つの場合には、そのまま分析に用いても問題はない。ただし、偏回帰係数の意味は小さい数値を与えたカテゴリに対して、大きい数値を与えたカテゴリの数値1単位当たりの基準変数に対する影響の大きさを示すので、注意が必要である。

表3は重回帰分析に用いる6変数間の単相関係数（ピアソンの積率相関係数）を示したものである。検定結果は示していないが、1,066例あると相関係数が0.06を超えると5%水準で有意となる。したがって、性とBMI以外はすべて有意な相関があることになる。単相関係数の結果では、EC皮下脂肪厚と最も相関が高いのはBMIであり、次に性、体重となっている。年齢と身長はEC皮

表1 分析に用いた多変量データの一部

年齢	性	身長	体重	BMI	TG	TC	HDL	GOT	GPT	γ -GTP	UA	FBS	EC皮下脂肪厚
61	1	159.5	73.5	28.89	219	210	46	28	27	27		102	19.0
57	2	151.0	73.0	32.02	198	215	63	76	125	49	5.4	132	33.0
47	2	148.9	53.0	23.90	53	175	69	26	24	48	3.1	85	29.0
56	1	169.0	75.0	26.26	110	195	48	21	27	19	7.3	125	24.0
51	2	159.3	54.2	21.36	77	174	88	30	29	170	4.3	87	20.0
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
65	1	162.5	60.1	22.76	176	266	42	17	15	20	6.9	91	9.0
54	1	154.9	53.4	22.26	114	226	52	24	32	99	6.1	107	10.0
59	2	156.0	68.4	28.11	123	204	64	47	102	34	5.0	124	16.5
66	2	147.9	63.4	28.98	294	233	40	25	23	20	4.4	87	24.5
70	1	170.6	84.0	28.86	84	139	53	23	16	33	4.0	96	12.0
62	2	152.5	78.0	33.54	77	186	80	61	60	26	6.3	157	14.0

(空白は欠損データ)

表2 分析に用いた変数の平均値と標準偏差

変数名	平均値	標準偏差
1) 年齢	55.6	9.2
2) 性	1.3	0.4
3) BMI	24.8	3.4
4) 身長	164.0	8.1
5) 体重	66.7	11.2
6) EC皮下脂肪厚	15.4	7.7

(標本数1,066例)

下脂肪厚と逆相関になっている。さらによくみると、BMIと体重は0.803という極めて大きな相関を示している。これは、BMIの計算からもっとものように思えるが、身長とは-0.018とほぼ無相関となっており、必ずしもBMIの計算式から予測されるような大きな逆相関を示していない。

これらの結果は、個々の2変数間の相関係数からのものであるが、他の変数との相関関係も考慮して統計的解析をするためには、重回帰分析を行う必要がある。

表4は、EC皮下脂肪厚を基準変数に、他の5変数を説明変数として重回帰分析を行った結果である。表4の「偏回帰係数」とは重回帰式での各説明変数にかかる重みである。表3に示した説明

変数間の相関係数行列の逆行列に、基準変数と説明変数の相関係数ベクトルをかけることで、標準偏回帰係数が求められる。そして、標準偏回帰係数に基準変数と各説明変数の標準偏差の比をかけることで偏回帰係数が求められる。なお、重回帰分析の正確な理論を知りたい読者は、参考文献¹⁾を参照して欲しい。

基準変数の予測値は、偏回帰係数と説明変数の積の合計に、定数を加えた値によって求められる。重回帰式による予測値と実際値との相関係数は「重相関係数 multiple correlation coefficient」と呼ばれている。

表4の「標準誤差」とは、偏回帰係数の推定上の精度を示すもので、検定のときに使用する。実際の問題として、基準変数に対して、どの説明変数の影響が大きいかは、偏回帰係数の大きさからは分からない。偏回帰係数は、説明変数にかかる重みなので、大きな数値の変数では相対的に小さく、小さな数値の説明変数では相対的に大きくなるのが普通だからである。そのため、すべての変数を平均0、分散1に標準化した場合の重みである標準偏回帰係数が大きいほど、基準変数への影響があるものと考えてよい場合が多い。しかしな

表3 変数間の相関係数行列

変数名	1)	2)	3)	4)	5)	6)
1) 年齢	1.000	0.112	-0.141	-0.344	-0.327	-0.203
2) 性	0.112	1.000	0.059	-0.674	-0.347	0.472
3) BMI	-0.141	0.059	1.000	-0.018	0.803	0.603
4) 身長	-0.344	-0.674	-0.018	1.000	0.571	-0.245
5) 体重	-0.327	-0.347	0.803	0.571	1.000	0.351
6) EC皮下脂肪厚	-0.203	0.472	0.603	-0.245	0.351	1.000

表4 EC皮下脂肪厚の重回帰分析の結果

変数	偏回帰係数 (標準誤差)	標準偏回帰係数	F値 (p値)	偏相関係数	ΔRSq
年齢	-0.139 (0.018)	-0.166	58.2 (0.000)	-0.228	0.023
性	8.450 (0.480)	0.479	310.1 (0.000)	0.476	0.121
BMI	0.850 (0.336)	0.370	6.4 (0.011)	0.078	0.003
身長	-0.096 (0.103)	-0.100	0.9 (0.353)	-0.029	0.000
体重	0.154 (0.123)	0.223	1.6 (0.211)	0.038	0.001
定数	-3.196				
重相関係数 (2乗) *)		0.765 (0.586)			
自由度調整済重相関係数		0.764 (0.584)			
自由度再調整済重相関係数		0.763 (0.582)			

*) F (自由度) = 299.6 (5, 1060), p = 0.0000

がら、表4では、体重の標準偏回帰係数が0.223と年齢の-0.166よりも絶対値の比較で大きくなっているが、後述するF値や偏相関係数では逆に小さくなっており、必ずしも標準偏回帰係数が大きいから影響も大きいとはいえない場合があるので注意がいる。

標準偏回帰係数で基準変数に対する影響の大きさをある程度は検討できるが、得られた結果が偶然のものでないかを統計学的に検定する必要がある。表4に示した上側の「F値」は、「母偏回帰係数=0」の帰無仮説を検定するためのものである。いまk個の説明変数が重回帰式に含まれており、そのときの重相関係数を R_k とする。ある説明変数を一つ取り除いた場合の重相関係数を R_{k-1} とすると、取り除いた変数の影響は、

$$F_0 = (n-k-1) \cdot \frac{R_k^2 - R_{k-1}^2}{1 - R_{k-1}^2}$$

により求められるF値が自由度(1, n-k-1)のF分布に従うことから検定できる。求めたF値が大きければ、その説明変数の基準変数への影響は大きいものと考えてよい。表では通常検定のように、有意確率を(p値)としてカッコ内に示した。ただし、通常検定では5%水準などで、有意性の判断を行うのが一般的であるが、重回帰分析では後述するようにF値の数値が2以上か否かが規準として用いられることが多い。

表4の「偏相関係数」は、基準変数であるEC皮下脂肪厚と各説明変数について、他の説明変数の影響を除いた場合の相関係数を示している。したがって、基準変数と個々の説明変数単独の関係の強さは、この偏相関係数で表されることになる。偏相関係数と標準偏回帰係数の数値はほぼ一致しているが、やはり微妙な相違がある。特にBMI、身長、体重の標準偏回帰係数と偏相関係数は差が大きくなっている。これは、後述する理由から、体重とBMIの相関が異常に大きいことによる結果と考えられる。

表4の下側には、重相関係数とその2乗の多重決定係数が表示されている。また欄外最下段に、重相関係数の検定のためのF値と自由度、およびそのp値(有意確率)が示されている。F値は

299.6であり、その有意確率は0.0000(未満の確率を意味する)と極めて高度に有意である。この結果は、求めた重回帰式が基準変数の予測に寄与するという意味をもつことを示している。

ところで、重相関係数は説明変数の増加に伴い単調に増加し、説明変数の個数が(ケース数-1)になると必ず1となる。したがって、重相関係数はケース数が説明変数の個数に比べ大きくない場合、あまり適切な指標とはいえなくなる。そのような場合、ケース数と説明変数の個数を用いて、重相関係数を修正した「自由度調整済重相関係数」を求めればよい。実際にはさらに、自由度の再修正を行った「自由度再調整済重相関係数」を求めることが多い。これらの二つの重相関係数は、説明変数の個数がある一定の値を超えると減少し、自由度再調整済重相関係数は負の値さえとりえる。もしも、その値が負となれば、求めた重回帰式には何の意味もない。

表4の最右欄の「 ΔRSq 」はその説明変数を重回帰式から除いた場合、どれだけ重相関係数の2乗が減少するかを示すものである。したがって、この値が大きいほど基準変数に与える影響が大きいことになる。実際には、この値を用いて検定のためのF値が求められている。なお、 ΔRSq は重回帰式からある変数を一つ除いた場合の多重決定係数の減少分であるので、すべての変数について ΔRSq を合計しても、多重決定係数と一致しないので注意がいる。

重回帰分析における説明変数の選択

前述のように、重相関係数は説明変数の個数が増加するにつれ、その値も単調に増加し、説明変数の個数が標本数より1少ない人数に達すると必ず1になる。したがって、説明変数の個数を増やして、予測の程度を見掛け上いくらでもよいようにすることができる。そのようなことを避けるとともに、実際の分析で最適変数のみを重回帰式に含めるための適当な基準が必要となる。ここでは、説明変数の選択方法と最適説明変数の個数の決定に関する方法について簡単に述べる。

1) 総当たり法

説明変数が複数個ある場合、可能な変数の組み

合わせについて重回帰式を求め、それらを比較し、最良の変数の組み合わせのものを選ぶ方法である。選択の基準には、自由度調整済重相関係数もしくは自由度再調整済重相関係数が最大となる変数の組み合わせを採用すればよい。しかし、単純な計算でわかるように、変数の組み合わせの個数は、変数が p 個あれば、 $(2^p - 1)$ 通りある。かりに説明変数が10個あるのならば1,023通りある。このため、総当たり法は、説明変数の個数が少ない場合のみに用いられる。

2) 逐次選択法

変数選択の基本的な方法として、適当な基準により説明変数を1つずつ重回帰式に加えていく「変数増加法」と、逆にすべての説明変数を用いた分析から1つずつ変数を減らしていく「変数減少法」がある。

変数増加法では、一度重回帰式に含めた変数は、新たな変数の追加によって、回帰への寄与がほとんど無くなっても除外されることがない。そこで、一度重回帰式に含めた変数であっても、ある基準を満たさなくなった場合、重回帰式から除くようにする方法は、「変数増減法」と呼ばれる。

同様に、変数減少法において、一度除外された変数であっても、その後他の変数との関係で回帰に寄与することがある場合、もう一度採用するという方法は、「変数減増法」と呼ばれる。

上記の四つの方法による変数選択結果は、変数選択の基準によっては、どれを用いても同様の場合もあるし、全く異なる場合もある。

変数選択の基準として、前述の偏回帰係数の検定の F 値を用いることが多い。しかし、重回帰分析での変数選択は、通常の F 検定のように有意水準を5%や1%に設定するとは限らない。通常は、適当な大きさの F 値を設定し (F_{in})、その値と比較することで、変数を重回帰式に含めるか否かを決めるようにする。すなわち、ある説明変数の F 値が、 F_{in} より大きければ、重回帰式に含めることにする。この場合、重回帰式に含まれていない説明変数が複数個ある場合、最大の F 値をもつ変数を一つだけ選択するようにする。もし、すべての変数の F 値が F_{in} より小さければ、そこで変数の追加を終了する。これが、 F 検定による変数

増加法である。

変数減少法も同様の基準を用いて行うことができる。すべての説明変数の F 値を求め、その最小のものを F_{min} としよう。 F_{min} の値があらかじめ設定しておいた基準値 F_{out} と比べて小さければ、その変数を重回帰式から除くことにすればよい。求めた F_{min} の値が F_{out} より大ならば、そこで変数の減少を終了する。

変数増加法や減少法の基準である F 値をどのくらいにするかは、最終的に重回帰式に残される変数の個数に大きく影響する。通常は、 F_{in} や F_{out} の値として2を用いることが多い。

変数増減法は、変数増加法で変数を選択している場合、すでに重回帰式に含めた説明変数に対しても、その変数を除いた場合の F 値を求め、そのうち最小の数値が F_{out} より小さければ、その変数を除くことにすればよい。

同様に、変数減増法は、変数減少法により変数を除いていく場合、すでに重回帰式から除かれた変数に対しても、 F 値を求め、その最大のものが F_{in} より大きければ、その変数を再び重回帰式に含めるものとすればよい。

これらの変数選択法のうち「変数減増法」が、最もよいモデルを与えるといわれている。

表5は変数減増法で、 F 値の基準である F_{in} 、 F_{out} とともに2として、説明変数を選択したものである。説明変数として年齢、性、BMIの3変数が選択された。 F 値をみると、表4に比べるとすべての変数で大きくなっていることが分かる。特に、BMIは標準偏回帰係数が0.370から0.550、 F 値が6.4から755.0と最大になっていることが分かる。偏相関係数も0.078から0.645と大きく変化している。これは、表2から分かるように、BMIと体重の間には0.803という極めて大きな相関があることによるものと考えられる。重回帰分析では、偏回帰係数の推定に相関係数行列の逆行列を計算するために、相互に相関の高い変数が存在する場合、推定値が不安定になり、信頼の置けない結果を生じることがある。そのような場合、一方の偏回帰係数が正であれば、他方の変数については負の値になることが多い。このような状況は、「多重共線性の問題」として知られている。この問題

表5 変数選択後のEC皮下脂肪厚の重回帰式

変数	偏回帰係数 (標準誤差)	標準偏回帰係数	F 値 (p 値)	偏相関係数	ΔRSq
年齢	-0.148 (0.017)	-0.177	77.3 (0.000)	-0.260	0.030
性	8.106 (0.352)	0.460	530.1 (0.000)	0.577	0.207
BMI	1.265 (0.046)	0.550	755.0 (0.000)	0.645	0.295
定数	-17.935				
重相関係数 (2 乗) *)		0.765 (0.585)			
自由度調整済重相関係数		0.764 (0.583)			
自由度再調整済重相関係数		0.763 (0.582)			

*) F (自由度) = 498.2(3, 1062), p = 0.0000

を避けるには、単に一方の変数を除けばよい。3 変数以上が相互に相関が高い場合には、問題が厄介であり、一般的な解決方法はないが、主成分分析 (次回以降で説明予定) などを用いて、合成変数を求めてから、重回帰分析を行うなどの工夫が必要であろう。

なお、表4と表5を比べると、重相関係数と自由度調整済重相関係数は若干減少したものの、自由度再調整済重相関係数はやや大きくなっていることがわかる。この結果は、求めた重回帰式がより適切なものになったことを示していると考えてよい。

表5の結果から、EC皮下脂肪厚は、BMIが大きいほど、男性と比べて女性ほど、年齢は若年者ほど、その値が大きいことになる。一般には、年齢が高いほど肥満傾向があるように思われるのだが、ここで用いた対象者では、高齢者ほど皮下脂肪厚が薄いようである。これらの結果は基本的には単独の変数での解析と大差はないが、複数の変数を組み合わせることで、より基準変数の予測の程度は高められている。

次に、血液検査項目を追加した場合の重回帰分析について、簡単に解説しよう。表6は、表5の変数と血液検査項目の平均値と標準偏差を示したものである。表1と比べると、標本数が974例と小さくなっている。これは実際例では、すべてのケースがすべての検査項目を受けているとは限らないことによる。このため、使用する変数の個数が異なると、変数間の相関係数も大きく異なってくる可能性があり、分析結果も微妙に異なることがある。

表7は重回帰分析に用いた12変数間の相関係

表6 血液検査を追加した場合の平均値と標準偏差

変数名	平均値	標準偏差
1) 年齢	56.0	8.9
2) 性	1.3	0.4
3) BMI	24.6	3.2
4) TG	146.6	100.7
5) TC	207.0	31.6
6) HDL	57.6	15.5
7) GOT	26.3	12.0
8) GPT	29.9	21.6
9) γ -GTP	48.7	51.5
10) UA	5.8	1.3
11) FBS	99.6	22.5
12) EC皮下脂肪厚	15.0	7.4

(注) 標本数が974例と変わったので、表2の結果と異なる。

数行列の下側三角部分を示したものである。相関係数行列は対角成分を挟んで対称となっているので、このように下側部分が上側部分のみを表示することが多い。表3と比べると、EC皮下脂肪厚と年齢、性、BMIとの相関係数はそれほど大差ないが、若干変化していることが分かる。

EC皮下脂肪厚を基準変数に、他の11変数を説明変数として、変数減少法を用いて重回帰分析を行った結果を表8に示した。

年齢、性、BMIの他に、六つの血液検査項目が重回帰式に追加された。しかしながら、重相関係数と自由度調整済重相関係数は若干増加したものの、自由度再調整済重相関係数はほんの少し減少している。偏相関係数をみても、TC以外はみな絶対値が0.1未満であり、F値が2以上の変数だけとはいえ、通常の5%水準の検定では、GPT、 γ -GTP、FBSはいずれも有意にならない。

表7 12変数間の相関係数行列

変数名	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)
1) 年齢	1.00											
2) 性	0.11	1.00										
3) BMI	-0.11	0.06	1.00									
4) TG	-0.07	-0.07	0.25	1.00								
5) TC	0.10	0.12	0.10	0.29	1.00							
6) HDL	0.06	0.15	-0.33	-0.38	0.08	1.00						
7) GOT	-0.00	0.02	0.24	0.16	0.12	-0.07	1.00					
8) GPT	-0.17	-0.03	0.37	0.22	0.11	-0.21	0.82	1.00				
9) γ -GTP	-0.07	-0.19	0.13	0.25	0.08	-0.02	0.45	0.37	1.00			
10) UA	-0.10	-0.39	0.21	0.21	0.07	-0.19	0.14	0.17	0.25	1.00		
11) FBS	0.05	0.00	0.17	0.20	0.10	-0.14	0.13	0.17	0.14	-0.03	1.00	
12) EC皮下脂肪厚	-0.18	0.48	0.59	0.10	0.15	-0.13	0.18	0.26	0.03	-0.04	0.06	1.00

(注) 対称行列なので下側三角部分のみを示した

表8 EC皮下脂肪厚に関する変数減少法による変数選択後の重回帰分析結果

変数	偏回帰係数 (標準誤差)	標準偏回帰係数	F値 (p値)	偏相関係数	ΔRSq
年齢	-0.145 (0.018)	-0.174	66.1 (0.000)	-0.253	0.028
性	8.018 (0.368)	0.474	474.1 (0.000)	0.574	0.203
BMI	1.187 (0.054)	0.521	485.2 (0.000)	0.579	0.208
TG	-0.005 (0.002)	-0.065	6.9 (0.009)	-0.084	0.003
TC	0.019 (0.005)	0.082	13.3 (0.000)	0.117	0.006
HDL	-0.023 (0.012)	-0.049	4.0 (0.047)	-0.064	0.002
GPT	0.013 (0.008)	0.039	2.6 (0.108)	0.052	0.001
γ -GTP	0.005 (0.003)	0.038	2.6 (0.108)	0.052	0.001
FBS	-0.014 (0.007)	-0.041	3.6 (0.057)	-0.061	0.002
定数	-17.441				
重相関係数 (2乗) *)		0.767 (0.588)			
自由度調整済重相関係数		0.764 (0.584)			
自由度再調整済重相関係数		0.762 (0.580)			

*) $F(\text{自由度}) = 152.630(9, 964)$, $p = 0.00000$

統計学的には、求めた重回帰式は意味があるものであるが、もしも皮下脂肪厚を簡単に推定することが目的ならば、表8よりも表5の結果で十分であろう。

おわりに

実例を用いて、重回帰分析の基本的な方法について解説を行った。重回帰分析は多変量解析のなかでは、基本的な方法であり、その考え方を理解することは、他の手法の理解にも通じるものと考えられる。

実際の分析には、統計学パッケージHALWIN^{1)~3)}

を使用した。試作版は私のホームページからダウンロードできるので、興味ある読者は実際に使用してみるとよいだろう。また、ほとんどの数式等の詳細は省略したが、興味ある読者は文献1, 3などを参考にして欲しい。

参考文献

- 1) 柳井晴夫, 高木廣文 編著: 多変量解析ハンドブック, 現代数学社 (京都), 1986.
- 2) 高木廣文, 柳井晴夫 編著: HALBAUによる多変量解析の実践, 現代数学社 (京都), 1995.
- 3) 高木廣文: HALWINによるデータ解析, 現代数学社 (京都), 1998.